

which determines the pair distribution function

$$P_2(e, e) = 1 - \frac{T_i}{k T_e^2} \frac{e^2}{r} \exp(-\kappa r) - \frac{1}{k T_e} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{e^2}{r} \exp(-\kappa_e r). \quad (40)$$

### Discussion

We compare our results with those of SALPETER and KADOMTSEV. With respect to the work of BUNE-

MAN and RENAULT we refer to the discussion SALPETER's paper.

The results of KADOMTSEV do not agree with those derived here. He gives the electron-electron correlation

$$g_{ee} = - \frac{e^2}{k T_e r} \exp(-\kappa r) \quad (41)$$

in contrast to our correlation function (40). KADOMTSEV's kinetic treatment is in principle correct. The deviation of his results is due to an error in the evaluation of the following system of equations

$$\begin{aligned} g_{ei}(r) - \frac{n e^2}{k T_e} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{g_{ii}(r') - g_{ei}(r')\} d\mathbf{r}' &= \frac{e^2}{k T_e r}, \\ g_{ee}(r) - \frac{n e^2}{k T_e} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{g_{ei}(r') - g_{ee}(r')\} d\mathbf{r}' &= - \frac{e^2}{k T_i r}, \\ g_{ii}(r) - \frac{n e^2}{k T_i} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{g_{ei}(r') - g_{ii}(r')\} d\mathbf{r}' &= - \frac{e^2}{k T_e r}. \end{aligned} \quad (42)$$

The correlation (41) does not satisfy this system, whereas (40) is a solution. This can be shown simply by insertion.

The results derived by SALPETER using a procedure similar to DEBYE's original approach agree with

those justified here by a general kinetic treatment. In addition we realize that application of these results must be restricted to the temperature range

$$m_i/m_e \gg T_e/T_i \gg m_e/m_i \quad (43)$$

due to eq. (13).

## Besetzungsdichten angeregter He I-Atome in einem nicht-thermischen Plasma

VON HANS-WERNER DRAWIN

Groupe de Recherches de l'Association EURATOM-CEA sur la FUSION, Fontenay-aux-Roses (Seine), Frankreich

(Z. Naturforsch. 19 a, 1451—1460 [1964]; eingegangen am 25. Juni 1964)

For nonthermal plasmas, the population densities of the ground level and the lower lying excited states can deviate considerably from a SAHA- and BOLTZMANN population density which are only valid for plasmas in (local) thermal equilibrium. To obtain the actual population densities of the lower lying states of the He I-Atom in a nonthermal, optically thin as well as in a partially optically thick plasma the corresponding rate equations have been solved. Due to the metastable state  $2^3S$  we have distinguished between the singlet and the triplet system. The coupling between the two systems has been accomplished by appropriate collisional processes. Numerical values are given for the population densities in terms of „SAHA“-population densities for both the lower singlet- and triplet levels in the case of an optically thin plasma. The relaxation times necessary for establishing a steady-state have been calculated. The influence of the triplet-system on the particle densities of the singlet-system is shown. For low electron densities the ratio  $n_i(\text{triplet})/n_i(\text{singlet})$  becomes larger than 3. By solving the complete system of rate equations and comparing the solutions with measured densities one can derive unknown total cross sections for reactions between excited states.

Im Falle (lokalen) thermodynamischen Gleichgewichtes (L.T.E.) ist die Besetzungsdichte der angeregten Niveaus eines Atoms oder Ions entsprechend einer BOLTZMANN-Verteilung gegeben. Die BOLTZMANN-Verteilung ist jedoch nicht mehr sicher-

gestellt bei Plasmen geringer Teilchendichten und kleinen geometrischen Abmessungen der zu untersuchenden Plasmaschichten, da die Anzahl der Stoßprozesse abnimmt und Absorption von Resonanzstrahlung klein wird. Der Grenzfall eines stationären



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Plasmas sehr geringer Dichte ( $n_e < 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), bei dem die Besetzungsdichten praktisch aus dem Anregungsquerschnitt Grundniveau  $\rightarrow$  angeregter Term und der spontanen Übergangswahrscheinlichkeit angeregter Term  $\rightarrow$  Grundniveau berechenbar ist, ist für ein Laborplasma ohne Bedeutung. Ab Dichten von  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , die in Laborplasmen häufig vorkommen, spielen jedoch die Gesamtheiten aller Stoßprozesse eine Rolle, wenn man die Besetzungsdichten genau genug angeben will. Diese Stoßprozesse sind ebenfalls wesentlich zur Berechnung der Relaxationszeiten. Die Kenntnis der Relaxationszeiten ermöglicht eine Entscheidung darüber, ob ein Plasma noch als stationär anzusehen ist, oder ob die Besetzungsdichten der einzelnen Niveaus durch eine Differentialgleichung beschrieben werden müssen. Da im letzteren Falle noch zusätzlich die – häufig nicht genau genug bekannten – Anfangsbedingungen in das Ergebnis eingehen, wird man versuchen, nach Möglichkeit die Bedingungen für ein stationäres Plasma zu erfüllen.

Für *Wasserstoff* und *wasserstoffähnliche* Ionen ist die Besetzungsdichte für den Fall optisch dünner und dichter Plasmen von verschiedenen Autoren berechnet worden<sup>1–5</sup>, und die Ionisation und Rekombination unter Berücksichtigung der Dreierstoßrekombination in angeregte Niveaus und der Ionisation von angeregten Niveaus aus wurde in letzter Zeit ebenfalls für H, H-ähnliche Ionen und He in der Literatur behandelt<sup>6–9</sup>.

Für He I ist die Besetzungsdichte angeregter Terme – unter Berücksichtigung der metastabilen Niveaus  $2^3\text{S}$  und  $2^1\text{S}$  – infolge  $h\nu$ -Absorption im verdünnten Strahlungsfeld von B-Sternen von STRUVE und WURM<sup>10</sup> berechnet worden. Detaillierte Berechnungen der Besetzungsdichten für *optisch dünne He-Plasmen* unter Berücksichtigung aller Stoßprozesse liegen bis jetzt jedoch nicht vor. He als Temperaturindikator spielt jedoch eine große Rolle. Die Übertragung der Rechnungen von H auf He I ist aber nicht ohne weiteres möglich, da das He I wegen seiner beiden Termsysteme und der beiden metastabilen Zustände  $2^1\text{S}$  und  $2^3\text{S}$ , die zudem eine rela-

tiv große Termdifferenz zu den benachbarten Termen  $2^1\text{P}$  und  $2^3\text{P}$  aufweisen, gegenüber H andere Besetzungsdichten erwarten läßt. Im folgenden wird über die Berechnung der Besetzung angeregter He I-Niveaus berichtet. Es wurde in allen Fällen ein statistisches Gleichgewicht („steady state“) zugrunde gelegt. Das Plasma wird in allen Übergängen als „optisch dünn“ angesehen.

## 1. Die Grundgleichungen

1.1. Bezeichnen wir die Teilchendichte eines angeregten Niveaus  $i$  mit  $n_i$ , so läßt sich die zeitliche Änderung von  $n_i$  durch folgende allgemeine Beziehung ausdrücken

$$dn_i/dt = \sum A_i^+ - \sum A_i^-, \quad (1)$$

wobei  $\sum A_i^+$  die Summe aller Prozesse, die zu einer Besetzung von  $i$  führen, und  $\sum A_i^-$  die Summe aller Prozesse, die eine Abregung von  $i$  bewirken, ist. Für jedes Niveau  $i$  gilt eine derartige Gleichung.

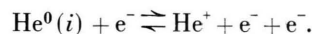
Im Falle des statistischen Gleichgewichtes zwischen an- und abregenden Prozessen ist außerdem

$$dn_i/dt = 0. \quad (2)$$

Dies ist die sog. „steady-state“-Beziehung, die im weiteren zugrunde gelegt wird.

1.2. Es werden folgende Einzelprozesse berücksichtigt:

1.2.1. Ionisation durch Elektronenstoß von einem Niveau  $i$  aus, und der inverse Prozeß, nämlich die Dreierstoßrekombination in das Niveau  $i$ :



Der Ionisationskoeffizient werde mit  $S_i$  [ $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ] bezeichnet, der Rekombinationskoeffizient sei  $n_e Q_i$  [ $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ].

1.2.2. Anregung eines Niveaus  $j$  von einem Niveau  $i$  aus durch Elektronenstoß, und der inverse Prozeß, nämlich Stoßabregung des Niveaus  $j$  in das Niveau  $i$ :



<sup>1</sup> D. R. BATES u. A. E. KINGSTON, Nature, Lond. **189**, 652 [1961].

<sup>2</sup> R. W. P. McWHIRTER, Nature, Lond. **190**, 902 [1961].

<sup>3</sup> N. D'ANGELO, Phys. Rev. **121**, 505 [1961].

<sup>4</sup> D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Proc. Roy. Soc., Lond. **267**, 297 [1962]; **270**, 155 [1962].

<sup>5</sup> R. W. P. McWHIRTER u. A. G. HEARN, Culham Report CLM-P. 23 [1963]; Proc. Phys. Soc., Lond. **82**, 641 [1963].

<sup>6</sup> ST. BYRON, R. C. STABLER u. P. I. BORTZ, Phys. Rev. Letters **8**, 376 [1962].

<sup>7</sup> E. HINNOV u. J. G. HIRSCHBERG, Phys. Rev. **125**, 795 [1962].

<sup>8</sup> M. A. BIONDI, Phys. Rev. **129**, 1181 [1963].

<sup>9</sup> H.-W. DRAWIN, Z. Phys. **172**, 429 [1963].

<sup>10</sup> O. STRUVE u. K. WURM, Astrophys. J. **88**, 84 [1938].

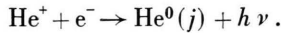
Die entsprechenden Koeffizienten seien für den Prozeß  $i \rightarrow j$ :  $C_{ij}$  [ $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ ], für den Prozeß  $i \leftarrow j$ :  $F_{ij}$  [ $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ ].

1.2.3. Spontaner Übergang von einem Niveau  $j$  zu einem tiefer gelegenen Niveau  $i$  unter Aussendung eines Lichtquants  $h\nu_{ij}$ :



Die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit werde mit  $A_{i \uparrow j} \equiv A_{ij}$  [ $\text{s}^{-1}$ ] bezeichnet.

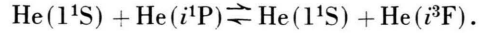
1.2.4. Spontane Rekombination eines He-Ions zu einem neutralen He-Atom im angeregten Zustand  $j$  unter Aussendung eines Lichtquants  $h\nu = E_j + \frac{1}{2} m_e v^2$ :



Der Rekombinationskoeffizient werde mit  $R_j$  [ $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ ] bezeichnet. Da das Strahlungsfeld als stark

verdünnt angenommen werden kann, darf die Photoionisation, die den umgekehrten Prozeß darstellt, vernachlässigt werden (optisch dünner Fall).

1.2.5. Energieaustausch zwischen dem Triplett- und dem Singulett-System durch Stoß entsprechend der Reaktionsgleichung



Die entsprechenden Austauschkoefizienten werden im folgenden für den Prozeß  $i^1\text{P} \rightarrow i^3\text{F}$  mit  $E_{ii}^{(xy)}$  [ $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ ], für den Prozeß  $i^3\text{F} \rightarrow i^1\text{P}$  mit  $E_{ii}^{(yx)}$  [ $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ ] bezeichnet. Dieser Energieaustausch wird ab  $i \geq 4$  berücksichtigt. Für  $i < 4$  soll er vernachlässigbar klein sein. (Siehe hierzu 2.2.6.)

1.2.6. Unter Berücksichtigung der genannten Prozesse kann das zu lösende Gleichungs-System wie folgt geschrieben werden [Gl. (3)]:

$$\begin{array}{l} \downarrow i \\ \rightarrow j \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + \dots + a_{0,4}x_4 + \dots + a_{0,p}x_p & + & b_{0,1}y_1 + b_{0,2}y_2 + \dots + b_{0,4}y_4 + \dots + b_{0,p}y_p & = & \alpha_0^{(x)}, \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,4}x_4 + \dots + a_{1,p}x_p & + & b_{1,1}y_1 + 0 + \dots + 0 + \dots + 0 & = & \alpha_1^{(x)}, \\ a_{2,0}x_0 + a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,4}x_4 + \dots + a_{2,p}x_p & + & 0 + 0 + \dots + 0 + \dots + 0 & = & \alpha_2^{(x)}, \\ a_{3,0}x_0 + a_{3,1}x_1 + \dots + a_{3,4}x_4 + \dots + a_{3,p}x_p & + & 0 + 0 + \dots + 0 + \dots + 0 & = & \alpha_3^{(x)}, \\ a_{4,0}x_0 + a_{4,1}x_1 + \dots + a_{4,4}x_4 + \dots + a_{4,p}x_p & + & 0 + 0 + \dots + b_{4,4}x_0y_4 + \dots + 0 & = & \alpha_4^{(x)}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,0}x_0 + a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,4}x_4 + \dots + a_{p,p}x_p & + & 0 + 0 + \dots + 0 + \dots + b_{p,p}x_0y_p & = & \alpha_p^{(x)}, \\ c_{1,0}x_0 + c_{1,1}x_1 + \dots + 0 + \dots + 0 & + & d_{1,1}y_1 + d_{1,2}y_2 + \dots + d_{1,4}y_4 + \dots + d_{1,p}y_p & = & \delta_1^{(y)}, \\ c_{2,0}x_0 + 0 + \dots + 0 + \dots + 0 & + & d_{2,1}y_1 + d_{2,2}y_2 + \dots + d_{2,4}y_4 + \dots + d_{2,p}y_p & = & \delta_2^{(y)}, \\ c_{3,0}x_0 + 0 + \dots + 0 + \dots + 0 & + & d_{3,1}y_1 + d_{3,2}y_2 + \dots + d_{3,4}y_4 + \dots + d_{3,p}y_p & = & \delta_3^{(y)}, \\ c_{4,0}x_0 + 0 + \dots + c_{4,4}x_0x_4 + \dots + 0 & + & d_{4,1}y_1 + d_{4,2}y_2 + \dots + d_{4,4}y_4 + \dots + d_{4,p}y_p & = & \delta_4^{(y)}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{p,0}x_0 + 0 + \dots + 0 + \dots + c_{p,p}x_0x_p & + & d_{p,1}y_1 + d_{p,2}y_2 + \dots + d_{p,4}y_4 + \dots + d_{p,p}y_p & = & \delta_p^{(y)}. \end{array} \end{array}$$

Um das Grundniveau ( $1^1\text{S}$ ) von den übrigen Niveaus deutlich abzuheben, ist es mit dem Index 0 versehen. Die Indizes 1 und 2 wurden für den 2S- und 2P-Term benutzt. Ab  $i=3$  stimmt der Index mit der Hauptquantenzahl überein, eine Unterteilung in S-, P-, D-Terme ist ab  $i=3$  unterlassen worden. Es wird angenommen, daß diese Terme entsprechend ihrem statistischen Gewicht besetzt sind. Die Besetzungsdichten im Singulett-System sind mit  $x_i$ , diejenigen im Triplett-System mit  $y_i$  bezeichnet. (Vgl. hierzu Abb.1, in der die wichtigsten und gegenüber dem Wasserstoff verschiedenen Prozesse eingezeichnet sind.)

Die Unbekannten  $x_i$ ,  $y_i$  können aus dem Gleichungssystem (3) berechnet werden, wenn die Ko-

effizienten — die letztlich von den atomaren Parametern, der Elektronendichte und der Temperatur abhängen — bekannt sind. Das Gleichungssystem (3) ist nichtlinear, da ab  $i=4$  der Energieaustausch zwischen dem  $x$ - und  $y$ -System von  $x_0$ , der Teilchendichte im Grundzustand, abhängt. Die Anzahl der Gleichungen wird im Prinzip durch das höchste gerade noch gebundene Energieniveau bestimmt. Sie hängt damit vom intermolekularen elektrischen Feld ab. (Bei geringen Teilchendichten, z. B.  $n_e = 10^{10} \text{cm}^{-3}$ , ist  $p \approx 1000$ .) Es ist aber bekannt<sup>2, 4, 5, 7, 11</sup>, daß ab  $p=15-20$  die Besetzungsdichten, bezogen auf die freien Elektronen des Kontinuums, stets nach der SAHA-Gleichung berechenbar sind. Wir haben das Gleichungssystem daher nur bis  $p=27$

<sup>11</sup> H.-W. DRAWIN, Report EUR-CEA-FC, Veröffentlichung in Vorbereitung, sowie Ann. Phys., Lpz., in Vorbereitung.

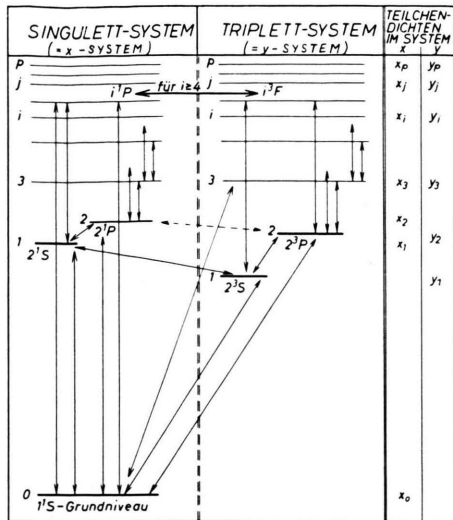


Abb. 1. Termschema von He I. Die wichtigsten „Stoßübergänge“ sind mit eingezeichnet. Einzelheiten siehe Text.

exakt gelöst. Die Fehler, die durch die Vernachlässigung der Niveaus  $p > 27$  entstehen, sind kleiner als die Fehler, die durch die ungenaue Kenntnis der Stoßquerschnitte für die tieferen Niveaus hervorgerufen werden<sup>12</sup>.

1.2.7. Die Relaxationszeit  $\tau_j^{(x)}$ ,  $\tau_j^{(y)}$ , d. h. die Zeit, die nötig ist, um den Term  $j$  wieder in ein statistisches Gleichgewicht mit allen anderen Übergängen zu bringen, ist nach Gl. (1) berechenbar. Setzt man die obigen Stoßkoeffizienten und Übergangswahrscheinlichkeiten ein, so folgt<sup>14</sup>:

$$\frac{1}{\tau_j^{(x)}} \cong \sum_{i=0}^{j-1} A_{ij}^{(x)} + n_e \left( S_j^{(x)} + \sum_{i=0}^{j-1} F_{ij}^{(x)} + \sum_{i=0}^{j-1} F_{ij}^{(xy)} + \sum_{l=j+1}^p C_{jl}^{(x)} + \sum_{l=j+1}^p C_{jl}^{(xy)} \right), \quad (4)$$

und sinngemäß für das  $y$ -System. Für Indizes  $i \geq 4$  ist in Gl. (4) der Energieaustauschterm  $E_{ii}$  vernachlässigt worden.

<sup>12</sup> Zur Berechnung der Gesamtteilchenzahl,  $\sum n_i$ , müssen alle angeregten Niveaus miterücksichtigt werden, da auch in nicht-thermischen Plasmen die Anzahl angeregter Teilchen größer sein kann als die Anzahl der Teilchen im Grundzustand<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> H.-W. DRAWIN, Rapport EUR-CEA-FC-252 [1964], Ann. Phys., Lpz., im Druck.

<sup>14</sup> Vernachlässigt man in Gl. (4) die  $A_{ij}$ ,  $F_{ij}$  und  $C_{jl}$ , so erhält man die Ionisations-Relaxationszeit für Plasmen sehr geringer Dichten ( $n < 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), für die die Korona-Formel anwendbar ist.

<sup>15</sup> H.-W. DRAWIN, Z. Phys. **164**, 513 [1961]; **172**, 429 [1963].

## 2. Die atomaren Stoßquerschnitte und Konstanten

Sie wurden für die unteren Niveaus einzeln der Literatur entnommen und – soweit sie nicht formelmäßig bekannt sind – durch passende Funktionen approximiert und dann über eine MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen integriert. Als relative Energie der Terme, bezogen auf die Temperatur  $T$ , wurde für den  $i$ -ten Term verwendet:

$$\text{im Singulett-System: } u_i^{(x)} = 1,58 \cdot 10^5 \cdot \frac{(Z + s_i^{(x)})^2}{\varepsilon^2 \cdot T}$$

$$\text{im Triplett-System: } u_i^{(y)} = 1,58 \cdot 10^5 \cdot \frac{(Z + s_i^{(y)})^2}{\varepsilon^2 \cdot T},$$

$$\text{mit } Z = 1; s_1^{(x)} = 0,247; s_2^{(x)} = 0,150;$$

$$s_i^{(x)} = 0 \quad \text{für } i \geq 3;$$

$$s_1^{(y)} = 0,367; s_2^{(y)} = 0,193;$$

$$s_i^{(y)} = 0 \quad \text{für } i \geq 3;$$

$$\varepsilon = 2 \quad \text{für } i = 1 \text{ und } 2; \quad \varepsilon = i \quad \text{für } i \geq 3;$$

und speziell für den He ( $1^1S$ )-Grundterm

$$u_0^{(x)} = 1,58 \cdot 10^5 \cdot \frac{(Z + 0,344)^2}{T}.$$

Als relatives Energiemaß der freien Elektronen, bezogen auf die Ionisationsenergie  $E_{i \rightarrow \text{Grenze}} = E_i$  bzw. die Anregungsenergie  $E_{i \rightarrow j} = E_{ij}$  wird gesetzt:

$$U_i = E/E_i \quad \text{bzw.} \quad U_{ij} = E/E_{ij},$$

wobei  $E = \frac{1}{2} m_e v^2$  die kinetische Energie der Elektronen bedeutet.

### 2.1. Stoßionisation und Dreierstoß-Rekombination

Für den Verlauf des differentiellen Ionisationsquerschnittes haben wir die Funktion<sup>15</sup>

$$q_i = q_i^{(\max)} \cdot 3,33 \cdot \frac{U_i - 1}{U_i^2} \log_e(1,25 \beta_i U_i) \quad (5)$$

verwendet. Der Absolutwert  $q_i^{(\max)}$  im Maximum wurde für die unteren Niveaus Messungen<sup>16-18</sup> bzw. theoretischen Rechnungen<sup>19, 20</sup> entnommen, für die

<sup>16</sup> LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen, Atom- und Molekular-Physik, 1. Teil, Verlag Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

<sup>17</sup> M. VON ARDENNE, Tabellen der Elektronenphysik und Übermikroskopie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

<sup>18</sup> H. S. W. MASSEY and E. H. S. BURHOP, Electronic and Ionic Impact Phenomena, The Clarendon Press, Oxford 1956.

<sup>19</sup> D. R. BATES, Atomic and Molecular Processes, Academic Press, New York und London 1962.

<sup>20</sup> C. W. ALLEN, Astrophysical Quantities, 2nd Edition, The Athlone Press, London 1963.



höheren Terme wurden die entsprechenden Werte für Wasserstoff<sup>21</sup> eingesetzt, unter Berücksichtigung der statistischen Gewichte für das  $x$ - und  $y$ -System.  $S_i$  ist dann einfach

$$S_i = \int_{u_i}^{\infty} q_i f(v) v dv. \quad (6)$$

Der Koeffizient  $Q_i$  für Dreierstoß-Rekombination ist aus der SAHA-Gleichung berechenbar. Es ist<sup>22, 23</sup>

$$Q_i = \frac{\Sigma_0}{2 \Sigma_+} \cdot \frac{h^3}{(2 \pi m_e k T)^{3/2}} e^{+u_i} S_i \quad (7)$$

mit  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_+$  = Zustandssummen.

## 2.2. Stoßanregung und Stoßabregung

Für Stoßanregung müssen drei verschiedene Typen von Anregungsquerschnitten unterschieden werden:

### 2.2.1. Erlaubte Übergänge

Die differentiellen Anregungsquerschnitte sind sowohl im Singulett- als auch im Triplett-System durch die Funktion<sup>15, 21, 24</sup>

$$q_{i \rightarrow j} = q_{ij}^{(\max)} \cdot 3,33 \cdot \frac{U_{ij}-1}{U_{ij}^2} \log_e(1,25 \beta_{ij} U_{ij}) \quad (8)$$

zu beschreiben.  $q_{ij}^{(\max)}$  ist der Wert im Maximum bei  $U_{ij}^{(\max)}$ . Für die Übergänge zwischen unteren Niveaus wurde  $q_{ij}^{(\max)}$  wieder durch Vergleich mit experimentellen Werten bzw. Rechnungen<sup>16, 18, 21, 25</sup> erhalten, für die Übergänge zwischen hochangeregten Termen wurden die entsprechenden Werte für Wasserstoff eingesetzt.

### 2.2.2. Verbotene Übergänge ohne Änderung der Multiplizität (z. B. $1^1S \rightarrow 2^1S$ ).

In diesem Falle ergeben Theorie und Messungen übereinstimmend<sup>16, 18, 24, 26</sup> den Kurvenverlauf

$$q_{i \rightarrow j} = q_{ij}^{(\max)} \cdot 4 (U_{ij} - 1) / U_{ij}^2;$$

$q_{ij}^{(\max)}$  wurde durch Vergleich mit den Literaturwerten erhalten.

### 2.2.3. Verbotene Übergänge mit Änderung der Multiplizität (z. B. $1^1S \rightarrow 2^3P$ ).

Der differentielle Anregungsquerschnitt zeigt ein Maximum sehr nahe am „threshold“<sup>16, 19, 24, 27</sup> und fällt dann monoton mit  $\sim U_{ij}^{-3/2}$  ab. Die Anregungsfunktion ist zwar am „threshold“  $U_{ij}=1$  gleich Null. Der Anstieg ist aber so stark, daß er für die praktischen Berechnungen durch einen unendlichen Anstieg ersetzt werden kann. Damit läßt sich dann die Anregungsfunktion sehr einfach darstellen durch die Funktion

$$q_{i \rightarrow j}^{x,y} = q_{ij}^{(\max)} / U_{ij}^{3/2}. \quad (9)$$

Folgende Übergänge wurden berücksichtigt:  $1^1S \rightarrow 2^3S$ ,  $1^1S \rightarrow 2^3P$  und alle Übergänge  $1^1S \rightarrow$  alle Terme des Triplett-Systems, sowie  $2^3S \rightarrow 2^1S$  (s. Anm. <sup>19, 28</sup>). Damit lassen sich die Anregungskoeffizienten  $C_{ij}$  ausrechnen. Die Abregungskoeffizienten  $F_{ij}$  erhält man aus der Beziehung

$$F_{ij} = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_j} \exp \{ + |u_i - u_j| \} C_{ij}, \quad (10)$$

wobei  $\tilde{\omega}_i$  und  $\tilde{\omega}_j$  die statistischen Gewichte sind. Es sei erwähnt, daß die  $C_{ij}$  den Absorptions-Oszillatorenstärken  $f_{ij}$  proportional sind, außer im Falle „verbotener“ Übergänge. In diesem letzteren Fall ist  $f_{ij}$  für Dipolstrahlung „Null“, der entsprechende Anregungsquerschnitt braucht sich jedoch nicht wesentlich von einem „erlaubten“ Übergang zu unterscheiden. Dies trifft speziell für  $1^1S \rightarrow 2^1S$  und  $1^1S \rightarrow 2^1P$  sowie  $1^1S \rightarrow 2^3S$ ,  $1^1S \rightarrow 2^3P$  zu, usw.

### 2.2.4. Übergangswahrscheinlichkeiten, Oszillatorenstärken

Soweit in der Literatur vorhanden<sup>16, 20, 29</sup>, wurden die für He I bekannten  $f_{ij}$ -Werte verwendet. Für die höher angeregten Niveaus, für die sich die  $f_{ij}$ -Werte ohnehin den Werten für Wasserstoff angleichen, wurden die  $f_{ij}$ -Werte für H eingesetzt<sup>22, 30</sup>. Die  $A_{ij}$  wurden aus den  $f_{ij}$  berechnet<sup>22</sup>.

### 2.2.5. Spontane Rekombination

Sie ist für die Niveaus  $1^1S$ ,  $2^1S$  und  $2^3S$  nicht mehr wasserstoffähnlich, d. h. nicht mehr proportio-

<sup>21</sup> H.-W. DRAWIN, Report EUR-CEA-FC-236, Fontenay-aux-Roses 1963.

<sup>22</sup> A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, 2. Auflage, Verlag Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

<sup>23</sup> G. ELWERT, Z. Naturforsch. **7a**, 432 [1952].

<sup>24</sup> C. SMIT, H. G. M. HEIDEMAN u. J. A. SMIT, Physica **29**, 245 [1963].

<sup>25</sup> R. M. ST. JOHN, CH. J. BRONCO u. R. G. FOWLER, J. Opt. Soc. Amer. **50**, 28 [1960].

<sup>26</sup> Handbuch der Physik, Bd. **36**, Atome II, Verlag Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

<sup>27</sup> R. M. ST. JOHN u. R. G. FOWLER, Phys. Rev. **122**, 1813 [1961].

<sup>28</sup> A. V. PHELPS, Phys. Rev. **99**, 1307 [1955].

<sup>29</sup> W. BÖTTCHER, O. RÖDER u. K. H. WOBIG, Z. Phys. **175**, 480 [1963].

<sup>30</sup> L. C. GREEN, P. P. RUSH u. C. D. CHANDLER, Astrophys. J. Suppl. **3**, 37 [1957].

nal zu  $\nu^{-3}$ . Für diese Niveaus haben wir daher den differentiellen Rekombinationsquerschnitt einzeln nach der MILNESchen Beziehung<sup>31</sup>

$$q_{R,j} = G_j(\nu) \cdot \frac{(h\nu)^2}{mc^2 c^2 \nu^2} \cdot \frac{\tilde{\omega}_j}{\tilde{\omega}_+} \chi_j(\nu) \quad (11)$$

berechnet, wobei  $\tilde{\omega}_j$  = statistisches Gewicht des Termes  $j$ , in den der Einfang stattgefunden hat,  $\tilde{\omega}_+$  = statistisches Gewicht des rekombinierenden Ions,  $\chi_j(\nu)$  = atomarer Absorptionsquerschnitt,  $G_j(\nu)$  = GAUNT-Faktor.  $\chi_j(\nu)$  ist für die genannten Terme proportional zu  $\sim \nu^{-2}$ . Der Absolutwert von  $\chi_j(\nu)$  wurde den Arbeiten von VINTI<sup>32</sup> und TRUMPY<sup>33</sup> entnommen. Ab  $j=3$  wurde die wasserstoffähnliche Formel verwendet<sup>22, 23</sup>.

### 2.2.6. Austausch zwischen den Systemen $x \longleftrightarrow y$

Dieser Prozeß spielt nach ST. JOHN und FOWLER<sup>27</sup> sowie LIN und FOWLER<sup>34</sup> eine wesentliche Rolle. Er geschieht unter Mitwirkung eines He-Atoms im Grundzustand  $1^1S$ . Bezüglich Einzelheiten, insbesondere über eine eventuelle Verletzung der WIGNER-Beziehung, sei auf die genannte Literatur verwiesen. Wir haben diesen Prozeß bei unseren Rechnungen berücksichtigt. Die entsprechenden Stoßquerschnitte sind weitgehend temperaturunabhängig und nach<sup>27</sup> gegeben durch

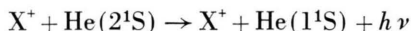
$$\begin{aligned} q(i^1P \rightarrow i^3F) &\cong 4,7 \cdot 10^{-18} i^4; \\ q(i^3F \rightarrow i^1P) &= \frac{1}{i} \cdot q(i^1P \rightarrow i^3F) \quad (12) \\ \text{für } i &\geq 4, \quad q \text{ in } [\text{cm}^2]. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Stoßwahrscheinlichkeit haben wir angenommen, daß die reagierenden Neutralteilchen eine MAXWELL-Temperatur haben, die gleich der Elektronentemperatur ist.

2.2.7. Nicht berücksichtigt wurden bei unseren Rechnungen die Umladungsprozesse



sowie die Abregung des  $2^1S$ - und  $2^3S$ -Termes durch Stoß mit Ionen<sup>35</sup> unter Aussendung eines Lichtquants entsprechend



( $X^+$  bezeichnet ein Ion). Ferner haben wir die Doppelionisation  $\text{He}^0 \rightarrow \text{He}^{2+}$ , deren Wirkungsquerschnitt klein ist<sup>36, 37</sup>, nicht berücksichtigt sowie die dielektronische Rekombination über ein doppelt angeregtes He-Atom, die nach<sup>19</sup> ebenfalls keinen großen Einfluß haben soll. Die Berücksichtigung der dielektronischen Rekombination im Gleichungssystem (3) bereitet prinzipiell keine Schwierigkeiten, da sie der spontanen Rekombination nur additiv hinzugefügt zu werden braucht.

## 3. Die Resultate

Die Rechnungen wurden auf der elektronischen Rechenmaschine IMB 7090 durchgeführt. Da das Gleichungssystem (3) nichtlinear ist, wurde zunächst unter Fortlassung der nichtlinearen Austauschsterme eine Näherungslösung ermittelt, die dann als Anfangslösung für ein Iterationsverfahren diente. Lösungen wurden sowohl für ein optisch dünnes Plasma als auch für ein solches mit zunehmender optischer Dicke unter Berücksichtigung von Re-Absorption und Photoionisation ermittelt. Die Teilchendichten wurden sowohl für ein „vereinfachtes“ He-Modell, das nur aus dem Singulett-System besteht, als auch für das vollständige Modell unter Einschluß des Triplett-Systems gewonnen. Wir geben hier nur die Werte für den Fall eines vollständig optisch dünnen Plasmas.

### 3.1. Einfluß des Triplett-Systems

Sein Einfluß läßt sich studieren, wenn man zunächst die Teilchendichten für ein Modell berechnet, das das Triplett-System vernachlässigt (sog. „vereinfachtes“ Modell), und dann die Teilchendichten des vollständigen Systems unter Einfluß des Triplett-Systems ermittelt. Die erhaltenen Ergebnisse sind für das Grundniveau  $1^1S_0$  in Tab. 1 dargestellt. Tabelliert ist der Faktor  $b_1$ , der angeben soll, um wieviel die berechnete relative Teilchendichte,  $(1/n_+) \cdot x_0 = (n_1/n_+)^{(\text{berechn.})}$ , von einer Dichte nach SAHA,  $(n_1/n_+)^{(\text{SAHA})}$ , abweicht.

$b_1$  ist wie folgt definiert<sup>38</sup>:

<sup>31</sup> E. A. MILNE, Phil. Mag. **47**, 209 [1924].

<sup>32</sup> J. P. VINTI, Phys. Rev. **44**, 524 [1933].

<sup>33</sup> B. TRUMPY, Z. Phys. **54**, 372 [1929].

<sup>34</sup> CH. C. LIN u. R. G. FOWLER, Ann. Phys., New York **15**, 461 [1961].

<sup>35</sup> D. C. S. ALLISON u. A. DALGARNO, Proc. Phys. Soc., Lond. **81**, 23 [1963].

<sup>36</sup> R. H. HUGHES u. L. D. WEAVER, Phys. Rev. **132**, 710 [1963].

<sup>37</sup> P. V. FELTSAN u. I. P. ZAPESOTCHNYI, Izv. Akad. Nauk, SSSR, Ser. Fiz. **27**, 1040 [1963].

<sup>38</sup> Für die praktischen Rechnungen wurde in allen Fällen  $\Sigma_+$  durch das statist. Gewicht des  $1^2S$ -Zustandes von  $\text{He}^+$  ersetzt, um damit von der Unsicherheit frei zu werden, die mit der Festlegung des höchsten noch gebundenen Termes verbunden ist.  $b_i$  nach Gl. (13) ist von der  $\text{He}^+$ -Dichte  $n_+$  unabhängig.

$$b_i = n_i^{(\text{berechn.})} / n_i^{(\text{Saha})} \quad (13)$$

$$= n_i^{(\text{berechn.})} \cdot \frac{2 \sum_{\omega_i}}{n_e} \cdot \frac{(2 \pi m_e k T)^{3/2}}{h^3} \exp(-u_i).$$

mit  $i=1$  für das Grundniveau. Für hohe Dichten strebt  $b_i$  dem Wert 1 zu, da dann Stöße alleine die Besetzungsdichten bestimmen. Aus Tab. 1 folgt: Die für das „vereinfachte“ Modell erhaltenen  $b_1$ -Werte

$\log_{10} n_e$	$10^{-3} T [^\circ\text{K}]$					
	6	10	20	30	60	120
8	—	2,1 <sup>10</sup>	1,7 <sup>10</sup>	1,8 <sup>10</sup>	1,9 <sup>10</sup>	2,2 <sup>10</sup>
10	—	3,6 <sup>8</sup>	2,7 <sup>8</sup>	2,5 <sup>8</sup>	2,3 <sup>8</sup>	2,4 <sup>8</sup>
12	2,4 <sup>7</sup>	1,5 <sup>7</sup>	8,6 <sup>6</sup>	6,8 <sup>6</sup>	4,8 <sup>6</sup>	3,9 <sup>6</sup>
14	4,1 <sup>5</sup>	2,6 <sup>5</sup>	1,3 <sup>5</sup>	1,0 <sup>5</sup>	6,6 <sup>4</sup>	5,0 <sup>4</sup>
16	1,4 <sup>3</sup>	1,5 <sup>3</sup>	1,0 <sup>3</sup>	8,5 <sup>2</sup>	6,0 <sup>2</sup>	4,6 <sup>2</sup>
18	4,9 <sup>0</sup>	6,4 <sup>0</sup>	7,1 <sup>0</sup>	7,4 <sup>0</sup>	6,3 <sup>0</sup>	5,3 <sup>0</sup>
19	2,3 <sup>0</sup>	3,0 <sup>0</sup>	3,5 <sup>0</sup>	3,8 <sup>0</sup>	4,2 <sup>0</sup>	4,0 <sup>0</sup>

Tab. 1 a.  $b(1^1S_0)$  für das vereinfachte Modell ohne Triplett-System.

$\log_{10} n_e$	$10^{-3} T [^\circ\text{K}]$					
	6	10	20	30	60	120
8	—	7,0 <sup>9</sup>	5,6 <sup>9</sup>	5,5 <sup>9</sup>	7,3 <sup>9</sup>	1,2 <sup>10</sup>
10	—	2,1 <sup>8</sup>	8,5 <sup>7</sup>	7,6 <sup>7</sup>	8,7 <sup>7</sup>	1,3 <sup>8</sup>
12	8,3 <sup>6</sup>	3,1 <sup>6</sup>	1,9 <sup>6</sup>	1,5 <sup>6</sup>	1,6 <sup>6</sup>	2,1 <sup>6</sup>
14	5,0 <sup>3</sup>	4,0 <sup>3</sup>	3,7 <sup>3</sup>	5,8 <sup>3</sup>	1,5 <sup>4</sup>	2,5 <sup>4</sup>
16	1,5 <sup>1</sup>	2,8 <sup>1</sup>	4,4 <sup>1</sup>	7,5 <sup>1</sup>	1,7 <sup>2</sup>	2,5 <sup>2</sup>
18	1,0 <sup>0</sup>	1,1 <sup>0</sup>	2,6 <sup>0</sup>	3,7 <sup>0</sup>	5,6 <sup>0</sup>	6,1 <sup>0</sup>
19	1,0 <sup>0</sup>	1,0 <sup>0</sup>	2,0 <sup>0</sup>	2,9 <sup>0</sup>	4,1 <sup>0</sup>	4,0 <sup>0</sup>

N. B.  $1,1^{10}=1,1 \cdot 10^{10}$ , etc. . .

Tab. 1 b.  $b(1^1S_0)$  für das vollständige Modell mit Triplett-System.

sind in der Größenordnung mit den für Wasserstoff erhaltenen Werten vergleichbar<sup>5, 13</sup>, wenn man die Temperaturen im reduzierten Maß  $kT/E_i=1/u_i$  mißt. Berücksichtigt man aber zusätzlich das Triplett-System, so werden die  $b_1$ -Werte kleiner und nähern sich schneller dem Wert 1. Dies liegt daran, daß das Triplett-System mit seinem metastabilen Grundniveau  $2^3S_1$  als Zwischenstufe für den dann folgenden Ionisationsprozeß  $2^3S \rightarrow$  Kontinuum dient. Sowohl der Anregungskoeffizient für das Niveau  $2^3S_1$  als auch der Ionisationskoeffizient  $2^3S_1 \rightarrow$  Kontinuum sind sehr groß. Aus den erhaltenen Werten folgt weiter, daß sich für dieselbe Elektronendichte  $n_e$  und reduzierte Temperatur  $u_i^{-1}$  das He näher am thermischen Gleichgewicht befindet als der Wasserstoff, solange die Temperaturen nicht zu hoch werden.

### 3.2. Relaxationszeiten

Sie sind nur wesentlich für das Grundniveau  $1^1S_0$  und die beiden metastabilen Zustände  $2^1S_0$ ,  $2^3S_1$ .

Für die anderen Niveaus sind sie um Größenordnungen kleiner. Da für diese drei Niveaus  $\tau \sim 1/n_e$  ist, genügt es,  $\tau n_e$  für verschiedene Werte  $T$  zu tabellieren. Die entsprechenden Werte sind in Tab. 2 a zusammengefaßt. In Tab. 2 b sind zum Vergleich einige  $n_e \tau^{(\text{ionis.})}$ -Werte zusammengefaßt, die sich als Ionisationszeiten  $\tau^{(\text{ionis.})}$  ergeben, wenn man die Korona-Formel zugrunde legt, bei der nur der Grundzustand und das Kontinuum berücksichtigt<sup>9, 23</sup>, Prozesse von und nach einzelnen angeregten Niveaus aber vernachlässigt werden.

$10^{-3} T [^\circ\text{K}]$	$n_e \tau_i [\text{sec} \cdot \text{cm}^{-3}]$		
	$i = 1^1S_0$	$2^1S_0$	$2^3S_1$
6	1,3 <sup>24</sup>	7,4 <sup>6</sup>	1,5 <sup>8</sup>
10	3,7 <sup>17</sup>	3,2 <sup>6</sup>	1,4 <sup>8</sup>
20	5,2 <sup>12</sup>	1,6 <sup>6</sup>	3,9 <sup>7</sup>
30	1,3 <sup>11</sup>	1,3 <sup>6</sup>	1,7 <sup>7</sup>
60	3,0 <sup>9</sup>	1,0 <sup>6</sup>	6,1 <sup>6</sup>
120	3,7 <sup>8</sup>	9,5 <sup>5</sup>	3,4 <sup>6</sup>
240	4,0 <sup>7</sup>	9,0 <sup>5</sup>	2,5 <sup>6</sup>

N. B.  $1,3^{24}=1,3 \cdot 10^{24}$ , etc.

Tab. 2 a. Reduzierte Relaxationszeiten  $n_e \tau_i$ , berechnet aus dem vollständigen System.

$10^{-3} T [^\circ\text{K}]$	10	20	30	60	120	240
$n_e \tau^{(\text{ionisation})} [\text{sec} \cdot \text{cm}^{-3}]$	8 <sup>21</sup>	4 <sup>14</sup>	2 <sup>12</sup>	1 <sup>10</sup>	1 <sup>9</sup>	2 <sup>8</sup>

N. B.  $8^{21}=8 \cdot 10^{21}$ , etc. . .

Tab. 2 b. Reduzierte Relaxationszeiten  $n_e \tau^{(\text{ionisation})}$  für Ionisation, berechnet nach der Korona-Formel.

### 3.3. Teilchendichten angeregter Atome

Die berechneten Teilchendichten  $(1/n_+) \cdot n_i^{(\text{berechn.})}$  sind wieder in Einheiten von  $(1/n_+) \cdot n_i^{(\text{Saha})}$  entsprechend der Gl. (13) angegeben. Die  $b_i$ -Werte sind für das optisch-dünne Plasma in den Tab. 3 a – 3 c zusammengefaßt. Die  $b_i$ -Werte nähern sich mit wachsender Hauptquantenzahl  $i$  dem Wert 1, d. h. daß selbst bei geringen Dichten  $n_e$  die hochangeregten Niveaus im Stoßgleichgewicht mit den freien Elektronen stehen. Damit ist jedoch noch nichts über das thermische Gleichgewicht ausgesagt.

Bedingung für (lokales) thermisches Gleichgewicht ist, daß alle  $b_i$  gleich 1 sind. Dies ist in einem optisch dünnen Plasma nur bei hohen Elektronendichten möglich.

Die Tabellen zeigen ferner, daß sich das Triplett-System näher am thermischen Gleichgewicht befindet als das Singulett-System, in Übereinstimmung mit den unter 3.1 beschriebenen Ergebnissen.

Term bzw. Niveau mit Hauptquanten- zahl $i$		$b_i$				
		$\log_{10} n_e$				
		10	12	14	16	18
Singulett-System	$1^1S_0$	2,1 <sup>9</sup>	3,1 <sup>6</sup>	4,0 <sup>3</sup>	2,8 <sup>1</sup>	1,1 <sup>0</sup>
	$2^1S_0$	2,0 <sup>8</sup>	3,1 <sup>5</sup>	3,9 <sup>2</sup>	4,7 <sup>0</sup>	2,7 <sup>0</sup>
	$2^1P_1$	6,0 <sup>1</sup>	3,5 <sup>1</sup>	4,3 <sup>0</sup>	2,8 <sup>0</sup>	3,5 <sup>0</sup>
	3	4,7 <sup>-1</sup>	6,2 <sup>-1</sup>	1,9 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>	1,0
	4	6,0 <sup>-2</sup>	2,1 <sup>-1</sup>	6,1 <sup>-1</sup>	1,0	
	5	2,9 <sup>-2</sup>	1,6 <sup>-1</sup>	8,5 <sup>-1</sup>		
	6	5,1 <sup>-2</sup>	3,0 <sup>-1</sup>	9,5 <sup>-1</sup>		
	7	1,0 <sup>-1</sup>	5,3 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>		
	8	2,3 <sup>-1</sup>	6,8 <sup>-1</sup>	9,9 <sup>-1</sup>		
	10	4,6 <sup>-1</sup>	8,5 <sup>-1</sup>	1,0		
	15	8,4 <sup>-1</sup>	9,5 <sup>-1</sup>			
20	9,2 <sup>-1</sup>	9,7 <sup>-1</sup>				
Triplet-System	$2^3S_1$	—	1,2 <sup>5</sup>	1,5 <sup>2</sup>	1,2 <sup>0</sup>	2,8 <sup>-1</sup>
	$2^3P_{0,1,2}$	—	1,9 <sup>3</sup>	1,3 <sup>2</sup>	2,2 <sup>0</sup>	3,8 <sup>-1</sup>
	3	3,2 <sup>0</sup>	2,8 <sup>0</sup>	2,5 <sup>0</sup>	1,0	1,0
	4	3,7 <sup>-1</sup>	1,1 <sup>0</sup>	1,2 <sup>0</sup>		
	5	5,3 <sup>-1</sup>	9,0 <sup>-1</sup>	1,0		
	6	7,2 <sup>-1</sup>	9,4 <sup>-1</sup>			
	7	8,9 <sup>-1</sup>	9,7 <sup>-1</sup>			
	8	9,6 <sup>-1</sup>	9,9 <sup>-1</sup>			
	10	9,7 <sup>-1</sup>	1,0			
	20	1,0				

N. B.: Unter der Stufenlinie ist  $b_i=1$ .  
Man lese 3,1<sup>6</sup>=3,1·10<sup>6</sup>, etc. . .

Tab. 3 a.  $T=1 \cdot 10^4$  °K.

Term bzw. Niveau mit Hauptquanten- zahl $i$		$b_i$				
		$\log_{10} n_e$				
		10	12	14	16	18
Singulett-System	$1^1S_0$	1,3 <sup>8</sup>	2,1 <sup>6</sup>	2,5 <sup>4</sup>	2,5 <sup>2</sup>	6,1 <sup>0</sup>
	$2^1S_0$	9,5 <sup>5</sup>	1,1 <sup>4</sup>	8,6 <sup>1</sup>	2,0 <sup>0</sup>	9,9 <sup>-1</sup>
	$2^1P_1$	1,8 <sup>0</sup>	2,2 <sup>0</sup>	1,9 <sup>0</sup>	1,5 <sup>0</sup>	1,2 <sup>0</sup>
	3	2,6 <sup>-1</sup>	3,6 <sup>-1</sup>	5,7 <sup>-1</sup>	9,9 <sup>-1</sup>	1,0
	4	1,4 <sup>-1</sup>	1,9 <sup>-1</sup>	7,7 <sup>-1</sup>	1,0	
	5	8,0 <sup>-2</sup>	1,5 <sup>-1</sup>	9,0 <sup>-1</sup>		
	6	5,8 <sup>-2</sup>	2,6 <sup>-1</sup>	9,6 <sup>-1</sup>		
	7	4,8 <sup>-2</sup>	4,6 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>		
	8	4,2 <sup>-2</sup>	6,1 <sup>-1</sup>	9,9 <sup>-1</sup>		
	10	4,4 <sup>-2</sup>	7,9 <sup>-1</sup>	1,0		
	15	1,5 <sup>-1</sup>	9,3 <sup>-1</sup>			
	20	2,5 <sup>-1</sup>	9,5 <sup>-1</sup>			
Triplet-System	$2^3S_1$	4,3 <sup>6</sup>	4,9 <sup>4</sup>	7,6 <sup>1</sup>	1,4 <sup>0</sup>	8,3 <sup>-1</sup>
	$2^3P_{0,1,2}$	9,3 <sup>2</sup>	1,0 <sup>3</sup>	4,0 <sup>1</sup>	1,4 <sup>0</sup>	1,0
	3	2,1 <sup>0</sup>	3,4 <sup>0</sup>	1,5 <sup>0</sup>	1,0	
	4	8,1 <sup>-1</sup>	1,1 <sup>0</sup>	1,0		
	5	5,2 <sup>-1</sup>	8,8 <sup>-1</sup>			
	6	4,4 <sup>-1</sup>	9,2 <sup>-1</sup>			
	7	4,5 <sup>-1</sup>	9,6 <sup>-1</sup>			
	8	4,7 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>			
	10	6,9 <sup>-1</sup>	9,9 <sup>-1</sup>			
	20	9,9 <sup>-1</sup>	1,0			

N. B.: Unter der Stufenlinie ist  $b_i=1$ .

Tab. 3 c.  $T=12 \cdot 10^4$  °K.

### 3.4. Verhältnis der Teilchendichten zwischen Triplet- und Singulett-System

Von besonderem Interesse ist das Verhältnis der Teilchendichten  $n_i^{(\text{triplett})}/n_i^{(\text{singulett})}$ . Dieses Verhältnis muß in einem stoßdominanten Plasma etwa gleich dem Verhältnis der statistischen Gewichte, also gleich 3 sein. Tab. 4 a – c zeigen, daß der Wert 3 bei geringen Elektronendichten erst für relativ hohe Hauptquantenzahlen  $i$  erreicht wird, sich aber mit wachsender Elektronendichte zu niedrigeren Werten  $i$  verlagert. Für sehr geringe Elektronendichten sind die dicht über dem metastabilen Term  $2^3S$  liegenden Terme relativ zu den Singulett-Termen stärker besetzt. Diese „relative“ Überbesetzung nimmt zu, wenn sich die Temperatur erhöht oder die Elektronendichte verringert. Der Grund für dieses Ansteigen ist darin zu suchen, daß der Austausch zwischen den angeregten Niveaus der beiden Termsysteme bei den vorliegenden Rechnungen entsprechend dem in Abschnitt 1.2.5. beschriebenen Prozeß berücksichtigt wurde. Die entsprechenden Austauschterme sind proportional zu  $y_i x_0$  bzw.  $x_i x_0$ , wobei  $x_0$  die Dichte des Grundzustandes ist. Da aber sowohl mit abnehmender Elektronendichte als auch mit steigender Temperatur das  $x_0$  abnimmt, müssen die den Aus-

Term bzw. Niveau mit Hauptquanten- zahl $i$		$b_i$				
		$\log_{10} n_e$				
		10	12	14	16	18
Singulett-System	$1^1S_0$	8,7 <sup>7</sup>	1,6 <sup>6</sup>	1,5 <sup>4</sup>	1,7 <sup>2</sup>	5,6 <sup>0</sup>
	$2^1S_0$	9,1 <sup>5</sup>	1,3 <sup>4</sup>	5,3 <sup>1</sup>	1,5 <sup>0</sup>	1,1 <sup>0</sup>
	$2^1P_1$	1,6 <sup>0</sup>	2,3 <sup>0</sup>	1,1 <sup>0</sup>	1,2 <sup>0</sup>	1,3 <sup>0</sup>
	3	1,4 <sup>-1</sup>	2,1 <sup>-1</sup>	4,1 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>	1,0
	4	7,6 <sup>-2</sup>	1,2 <sup>-1</sup>	7,4 <sup>-1</sup>	1,0	
	5	4,8 <sup>-2</sup>	1,2 <sup>-1</sup>	9,0 <sup>-1</sup>		
	6	3,8 <sup>-2</sup>	2,7 <sup>-1</sup>	9,6 <sup>-1</sup>		
	7	3,2 <sup>-2</sup>	4,8 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>		
	8	3,0 <sup>-2</sup>	6,4 <sup>-1</sup>	9,9 <sup>-1</sup>		
	10	4,1 <sup>-2</sup>	8,2 <sup>-1</sup>	1,0		
	15	1,8 <sup>-1</sup>	9,4 <sup>-1</sup>			
20	2,8 <sup>-1</sup>	9,6 <sup>-1</sup>				
Triplet-System	$2^3S_1$	4,5 <sup>6</sup>	6,5 <sup>4</sup>	9,5 <sup>1</sup>	1,5 <sup>0</sup>	7,9 <sup>-1</sup>
	$2^3P_{0,1,2}$	8,8 <sup>2</sup>	1,3 <sup>3</sup>	5,7 <sup>1</sup>	1,6 <sup>0</sup>	1,0
	3	1,6 <sup>0</sup>	3,3 <sup>0</sup>	1,6 <sup>0</sup>	1,0	
	4	6,3 <sup>-1</sup>	1,0 <sup>0</sup>	1,1 <sup>0</sup>		
	5	4,1 <sup>-1</sup>	8,6 <sup>-1</sup>	1,0		
	6	3,6 <sup>-1</sup>	9,1 <sup>-1</sup>			
	7	3,9 <sup>-1</sup>	9,6 <sup>-1</sup>			
	8	4,4 <sup>-1</sup>	9,8 <sup>-1</sup>			
	10	7,0 <sup>-1</sup>	1,0			
	20	9,9 <sup>-1</sup>				

Tab. 3 b.  $T=6 \cdot 10^4$  °K.

N. B.: Unter der Stufenlinie ist  $b_i=1$ .

Term bzw. Niveau mit Hauptquanten- zahl $i$	$n_i^{\text{tripl.}}/n_i^{\text{sing.}}$			
	$\log_{10} n_e$			
	12	14	16	18
$2^3S_1/2^1S_0$	2,4 <sup>0</sup>	2,1 <sup>0</sup>	1,6 <sup>0</sup>	1,0 <sup>0</sup>
$2^3P_{0,1,2}/2^1P_1$	1,3 <sup>2</sup>	5,4 <sup>1</sup>	1,6 <sup>0</sup>	2,6 <sup>-1</sup>
3	6,2 <sup>1</sup>	2,6 <sup>1</sup>	2,8 <sup>0</sup>	2,6 <sup>0</sup>
4	1,6 <sup>1</sup>	6,3 <sup>0</sup>	3,0	3,0 <sup>0</sup>
5	5,8 <sup>0</sup>	3,5 <sup>0</sup>		
6	4,2 <sup>0</sup>	3,0		
8	3,2 <sup>0</sup>			
10	3,0			

 Tab. 4 a.  $T = 6 \cdot 10^3$  °K.

Term bzw. Niveau mit Haupt- quantenzahl $i$	$n_i^{\text{tripl.}}/n_i^{\text{sing.}}$				
	$\log_{10} n_e$				
	10	12	14	16	18
$2^3S_1/2^1S_0$	4,2 <sup>0</sup>	4,15 <sup>0</sup>	4,1 <sup>0</sup>	2,7 <sup>0</sup>	1,1 <sup>0</sup>
$2^3P_{0,1,2}/2^1P_1$	3,6 <sup>2</sup>	2,5 <sup>2</sup>	1,4 <sup>2</sup>	3,7 <sup>0</sup>	0,5 <sup>0</sup>
3	1,5 <sup>2</sup>	1,4 <sup>1</sup>	4,0 <sup>1</sup>	3,1 <sup>0</sup>	2,8 <sup>0</sup>
4	3,8 <sup>1</sup>	1,6 <sup>1</sup>	5,8 <sup>0</sup>	3,0	3,0
5	2,4 <sup>1</sup>	1,7 <sup>1</sup>	1,0 <sup>1</sup>		
6	1,9 <sup>1</sup>	9,5 <sup>0</sup>	3,2 <sup>0</sup>		
8	8,1 <sup>0</sup>	4,3 <sup>0</sup>	3,0		
10	5,2 <sup>0</sup>	3,5 <sup>0</sup>			
15	3,1 <sup>0</sup>	3,0			
20	3,0				

 Tab. 4 b.  $T = 1 \cdot 10^4$  °K.

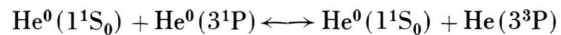
Term bzw. Niveau mit Haupt- quantenzahl $i$	$n_i^{\text{tripl.}}/n_i^{\text{sing.}}$				
	$\log_{10} n_e$				
	10	12	14	16	18
$2^3S_1/2^1S_0$	15,1	14,6	2,95	2,4	2,8
$2^3P_{0,1,2}/2^1P_1$	1700	1530	70	3,1	2,7
3	24,6	28,8	7,9	3,0	3,0
4	18,0	15,7	4,1		
5	19,7	17,1	3,4		
6	22,8	10,4	3,1		
8	33,0	4,8	3,0		
10	47,0	3,8			
15	18,8	3,2			
20	11,8	3,1			

 N. B.: Unter der Stufenlinie ist  $n_i^{\text{tripl.}}/n_i^{\text{sing.}} = 3$ .

 Tab. 4 c.  $T = 12 \cdot 10^4$  °K.

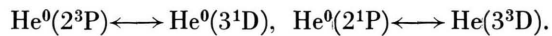
tausch bewirkenden Stöße weniger werden. Die Folge ist, daß sich das Verhältnis der Teilchendichten zu Werten größer als 3 verschiebt. Die weitere zusätzliche Einführung eines Austauschtermes ent-

sprechend der Reaktion



ändert an der prinzipiellen Eigenschaft der Lösungen nichts, sondern würde nur das Verhältnis der Teilchendichten für die Hauptquantenzahl  $i=3$  etwas erniedrigen.

In Tab. 4 fällt besonders das hohe Verhältnis  $n(2^3P)/n(2^1P)$  auf. Dieses Verhältnis läßt sich nur merkbar erniedrigen, wenn ein starker Austauschprozeß von der Art  $\text{He}^0(2^3P) \longleftrightarrow \text{He}^0(2^1P)$  existiert oder die 2P-Terme an die nächsthöheren 3D-Terme angekoppelt werden in der Form:



Die Wirkungsquerschnitte für diese Stoßprozesse müßten beträchtliche Werte annehmen. Starke Stoßübergänge dieser Art sind bisher nicht bekannt.

Es existieren so gut wie keine Messungen, mit denen die vorliegenden Rechnungen verglichen werden könnten, ausgenommen Messungen an dichten Plasmen, die bekanntlich den Wert 3 für das Teilchenverhältnis ergeben.

Messungen am helium-ähnlichen  $\text{Li}^+$ -Ion in einem Niederdruck-Bogen<sup>39</sup> in einer Li-Atmosphäre bei einer Elektronendichte von ca.  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$  und einer Temperatur von  $35\,000 \text{ °K}$  zeigten, daß das Triplett-System „relativ“ zum Singulett-System stärker besetzt ist als dem theoretischen Wert entspricht (siehe Tab. 5). Dies ist prinzipiell in Übereinstimmung mit den hier vorliegenden Rechnungen.

Dagegen zeigten Messungen an He I in einer Hohlkathodenentladung<sup>40</sup>, daß Triplett- und Singu-

Übergang	$\lambda(\text{tripl.})$ [Å]	$\lambda(\text{sing.})$ [Å]	$V_m$
7f — 3d	2507,0	2508,9	2
7d — 3p	2402,3	2539,5	2
6f — 3d	2728,4	2730,7	3,2
6d — 3p	2605,1	2767,1	3,4
5d — 3p	3029,1	3251,1	3,6
5p — 3d	3235,7	3187,5	24
5p — 3s	2674,4	2952,5	8
4p — 3d	4842,2	4637,8	18
4p — 3s	3684,1	4156,1	25
4s — 3p	4881,2	5038,7	12
3s — 2p	1653,2	1755,5	8

 Tab. 5. Gemessenes Intensitätsverhältnis  $V_m = I^{(\text{tripl.})}/I^{(\text{sing.})}$  für  $\text{Li}^+$  nach<sup>39</sup> für  $n_e \cong 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e \cong 3 \text{ eV}$ .

<sup>39</sup> M. R. SKIDMORE, J. R. McNALLY u. W. F. PEED, Oak Ridge-Semiannual Progress Report, ORNL-3104 [1961], p. 55 to 58.

<sup>40</sup> J. G. HIRSCHBERG, E. HINNOV u. F. W. HOFMANN, Proc. 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963, Vol. III, 359 — Editeur SERMA, Paris 1964.



lett-System annähernd gleich stark besetzt sind. Allerdings lassen sich die dort herrschenden Bedingungen nicht ohne weiteres auf die hier vorliegenden Rechnungen übertragen, da die anregenden und ionisierenden Elektronen eine Dichte von  $5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$  bei einer Temperatur von 200 eV besaßen, während die Rekombination durch kalte Elektronen der Dichte  $5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  bei einer Temperatur von 0,15 bis 0,20 eV zustande kam. Eine Betrachtung der Anregungsquerschnitte zeigt, daß bei einer derartigen

Energieverteilung das Singulett-System gegenüber dem Triplett-System bei der Anregung begünstigt wird.

Dem Leiter des Rechenzentrums, Herrn ROCHE, sowie Herrn BOUJOT sei sehr herzlich für die großzügige Unterstützung bei der praktischen Durchführung des umfangreichen Rechenprogramms gedankt. Herrn Dr. P. HUBERT, Leiter des Programms Kernfusion und Plasmaphysik, danke ich für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte.

## Quantitative spektroskopische Untersuchung schneller konvergenter Stoßwellen in Helium\*

VON OTTO ERNST BERGE UND WOLDEMAR BÖTTICHER

Institut für Experimentalphysik Kiel

(Z. Naturforschg. **19 a**, 1460—1465 [1964]; eingegangen am 28. September 1964)

Im Anschluß an BÖTTICHER und DAMMANN<sup>1</sup> wird der zeitliche Verlauf von Temperatur und Elektronendichte hinter der Front einer konvergenten Zylinderstoßwelle für verschiedene Radien berechnet und mit quantitativen spektroskopischen Messungen verglichen. Die Temperaturen werden aus der Absolutintensität optisch dicker Heliumlinien, die Elektronendichten aus der Kontinuumsintensität bestimmt. Zur Messung dient ein schnelles photoelektrisches Achtkanalspektrometer mit einer Genauigkeit von 10%. Die gemessenen Werte stimmen mit den an Hand des Modells berechneten überein.

### Die Berechnung von Temperatur und Elektronendichte

Zur Erzeugung der konvergenten Zylinderstoßwelle wird eine lineare Pinch-Entladung in Helium benutzt. Nach der Zündung bildet sich bei diesem Entladungstyp ein stromführender Hohlzylinder aus, der sich unter der Wirkung des magnetischen Druckes kontrahiert; dabei treibt die stromführende Schicht wie ein Kolben das Gas vor sich her. Die Geschwindigkeit der Kompression ist so groß, daß es zur Ausbildung einer Stoßwelle kommt. Da die Stromdichte im aufgesammelten Gas hinter der Front sehr klein bleibt, ist die Aufheizung durch die Stoßwelle wesentlich größer als die JOULEsche Aufheizung<sup>2</sup>.

Die Strömungsgeschwindigkeit und die thermodynamischen Daten des Gases hinter der Front können in diesem Falle rein gasdynamisch berechnet werden, wenn man die Weg-Zeit-Kurve der Stoßfront kennt. Die so erhaltenen Ergebnisse sind nur in

einem begrenzten Gebiet hinter der Stoßfront gültig. Die Rechnung<sup>1</sup>, die auf einer Lösungsmethode von GUDERLEY<sup>3</sup> fußt, soll hier nicht wiederholt werden, es seien nur die Voraussetzungen angegeben:

- I. Im Strömungsgebiet soll gelten:
  - a) Es wirken nur Druckkräfte,
  - b) die Zustandsänderungen verlaufen reversibel,
  - c)  $\kappa = c_p/c_v$  ist konstant,
  - d) die Randwerte der Strömung werden durch die Sprungbedingungen bestimmt.
- II. Die Weg-Zeit-Kurve der Stoßfront soll sich als  $r = a(-t)^{0,86}$  schreiben lassen. ( $r$  = Abstand von der Achse des Entladungsrohres,  $t$  = Zeit, wobei der Zeitnullpunkt dem Einlaufen der Stoßwelle in die Achse entspricht. Siehe<sup>1</sup>.)
- III. Druck, Dichte, Enthalpie und Strömungsgeschwindigkeit unmittelbar hinter der Front sollen sich aus den Sprungbedingungen für einen starken Stoß in einem idealen Gas (mit  $\gamma = c_p/c_v = \text{const}$ ) ergeben.

\* Die nachstehende Arbeit enthält wesentliche Teile der Dissertation von O. E. BERGE, Kiel 1964.

<sup>1</sup> W. BÖTTICHER u. H. DAMMANN, Z. Naturforschg. **18 a**, 580 [1963].

<sup>2</sup> O. E. BERGE, W. BÖTTICHER, G. KLEIST u. U. KOGELSCHATZ, VI. Int. Konf. über Ionisations-Phänomene in Gasen, Bd. IV, 345 (Paris 1963).

<sup>3</sup> G. GUDERLEY, Luftfahrtforschung **19**, 302 [1942].